TD Développements limités

Quelques DLs

QAV **Exercice 1**

1. $DL_3(0)$ de $\arctan \frac{x}{1-x}$
2. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$
3. $DL_4(0)$ de $\cos(xe^x)$
4. $DL_5(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+4x^2}}}$

N7H **Exercice 2** $DL_5(0)$ de $g\colon x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

I7H **Exercice 3** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un $DL_m(0)$ de $\frac{1}{(1-x)^n}$.

X8N **Exercice 4** 1. Décomposer $\frac{1}{1+x+x^2}$ en éléments simples. 2. Développement limité en 0 à l'ordre n de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

60Z **Exercice 5** 1. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}x^k + o(x^n)$. 2. En déduire un DL en 0 de $\arcsin x$ à l'ordre $2n+1$.

0U9 **Exercice 6** Donner le $DL_{10}(0)$ de $\ln\left(\sum\limits_{k=0}^{9} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Applications

G42 **Exercice 7** Soit $f\colon x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$.

1. Effectuer le $DL_2(0)$ de f.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0.

3XM **Exercice 8** Soit $u_n = (n\ln(n+1) - n\ln n)^n$. Déterminer la limite de u_n.

URM **Exercice 9**

1. Déterminer le $DL_2(1)$ de arctan
2. On pose $f(x) = x\arctan\frac{x+2}{x-1}$. Montrer que f admet en $+\infty$ une asymptote que l'on précisera.
   Indication : *Commencer par faire un* $DL(+\infty)$ *de* $\frac{x+2}{x-1}$.
3. Préciser la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

W91 **Exercice 10** On considère H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et expliciter sa dérivée.
2. Montrer que $u\colon x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. Déterminer la limite de H en 1^+.

8D1 **Exercice 11** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

1. Montrer l'existence de $a > 0$ tel que f soit strictement décroissante sur $[-a,0]$ et strictement croissante sur $[0,a]$.
2. Soit $b = \min(f(-a), f(a))$. Montrer que pour tout $\lambda \in [0,b]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-a,0]$ et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0,a]$.
3. Déterminer des équivalents de $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ en 0^+.
4. ★ On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Étudier la limite en 0 de $\frac{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)}{\lambda}$.

Existence et unicité

NRW **Exercice 12** Déterminer $\arctan^{(n)}(0)$.

MEG **Exercice 13**

1. Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^6)$.
   On se propose de déterminer a et b de plusieurs façons différentes :
2. En effectuant le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos x}$.
3. En écrivant que $\tan' = 1 + \tan^2$ et en procédant par identification des deux développements limités obtenus.
4. En utilisant le DL de arctan et la relation $\tan(\arctan x) = x$.

CU1 **Exercice 14** Soit $f\colon x \mapsto 2\tan x - x$, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que f admet une réciproque impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Donner le $DL_6(0)$ de f^{-1}.

HEG **Exercice 15** Soit f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(e^{\frac{1}{x^4}}\right)$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = o_0(x^n)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier brièvement que f' n'admet pas de limite en 0.
3. a) Une fonction dérivable admettant un DL d'ordre 2 en un point est-elle nécessairement «deux fois dérivable» en ce point ?
   b) Si f est dérivable et admet un DL d'ordre n, sa dérivée admet-elle nécessairement un DL d'ordre $n-1$ au même point ?
   c) Deux fonctions admettant le même DL à tout ordre en un point a sont-elles nécessairement égales au voisinage de a ?

V42 **Exercice 16** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' soit strictement positive.

1. Montrer que pour tout $h > 0$, il existe un unique réel $\theta_h \in]0,1[$ tel que $f(a+h) - f(a) = hf'(a+h\theta_h)$.
2. Déterminer la limite de θ_h quand $h \to 0$.

1HJ **Exercice 17** On considère la fonction $f\colon x \mapsto (\arcsin x)^2$.

1. Justifier que f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en note a_n les coefficients.
2. On pose $g = f'$. Justifier que g admet un $DL_n(0)$ impair et vérifie l'équation $(1-x^2)g'(x) - xg(x) = 2$ sur un intervalle à préciser
3. On note c_n le coefficient en x^n du $DL_n(0)$ de g. Montrer que $c_1 = 2$ et $c_{n+1} = \frac{n}{n+1}c_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que si $n \geq 2$ est pair, alors $a_n = \frac{1}{2}\frac{2^n(\frac{n}{2}-1)!^2}{n!}$ et que $a_n = 0$ sinon.

GPV **Exercice 18** ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On considère $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1. On suppose que pour tout $k \leq n+1$, $f^{(k)}(0) = 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $\forall k \leq n,\ g^{(k)}(0) = 0$.
2. En déduire que dans le cas général, g est de classe $\mathcal{C}^n$, et expliciter $g^{(n)}(0)$ en fonction de f.

GBT **Exercice 19** ★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(0) > 0$ et X^{n+1} divise $P(X)^2 - 1 - X$. Expliciter les coefficients de P.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que la matrice $I_n + M$ admet une racine carrée.

Formules de Taylor globales

LHL **Exercice 20**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\cos\frac{1}{2}$, à $\simeq 0.02$ près.

4XE **Exercice 21** Égalité de Taylor-Lagrange

1. Soit f, g continue sur $[a,b]$, avec f positive. Montrer qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(t_0)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Qu'obtient-on si $f = \tilde{1}$?
Indication : *Chercher à encadrer $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, en fonction de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
3. ★ Redémontrer ce résultat, en supposant seulement f $\mathcal{D}^{n+1}$.

TKY **Exercice 22** Formule de Machin, et approximation rationnelle de π.

1. a) Montrer que arctan est 1-lip. b) Montrer que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|\arctan x - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{2k-1}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{2n}$.
Indication : *Trouver une expression explicite de la dérivée n-ième de $\arctan$, en partant de* $\arctan'$.
3. Montrer que $S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)4^k}$ converge vers $\arctan\frac{1}{2}$. Déterminer n telle que $|S_n - \arctan\frac{1}{2}| \leq 10^{-20}$.
4. Expliquer comment déterminer une approximation rationnelle de π à une précision 10^{-20}.

QIR **Exercice 23** Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Limite, puis équivalent de (u_n).
2. Développement asymptotique à deux termes de (u_n).

HTA **Exercice 24** ★ Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, s'annulant en n points $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$|f(x)| \leq \sup_{[a,b]}\left|f^{(n)}\right|\frac{\left|(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|}{n!}$$

S7H **Exercice 25** Inégalité de Kolmogorov Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec f et f'' bornées, par M_0 et M_2 respectivement.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. En appliquant l'inégalité de TL à l'ordre 2 entre x et $x+h$, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
   b) En déduire que f' est bornée, par $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.
2. a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x, $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que $|2hf'(x)| \leq M_2h^2 + 2M_0$.
   b) En déduire que f' est bornée, par $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.
   c) Montrer que la constante $\sqrt{2}$ est optimale.

O1Z **Exercice 26** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall n,\ \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq \lambda^n n!$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n!$.

1. Montrer que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que f est nulle.

PM8 **Exercice 27** ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f = o_{\pm\infty}(x^n)$.

1. Montrer qu'il existe x tel que $f^{(n+1)}(x) = 0$.
2. Montrer que pour tout $r \geq n+1$, il existe x tel que $f^{(r)}(x) = 0$.